

رياضِيات 12 متقدّم الفَصل الدّراسي الثّالث

2024/2025

Jalshobaki.com

الوحدة السّادسة – تطبيقات التّكامل المحدود — Applications of the Definite Integral

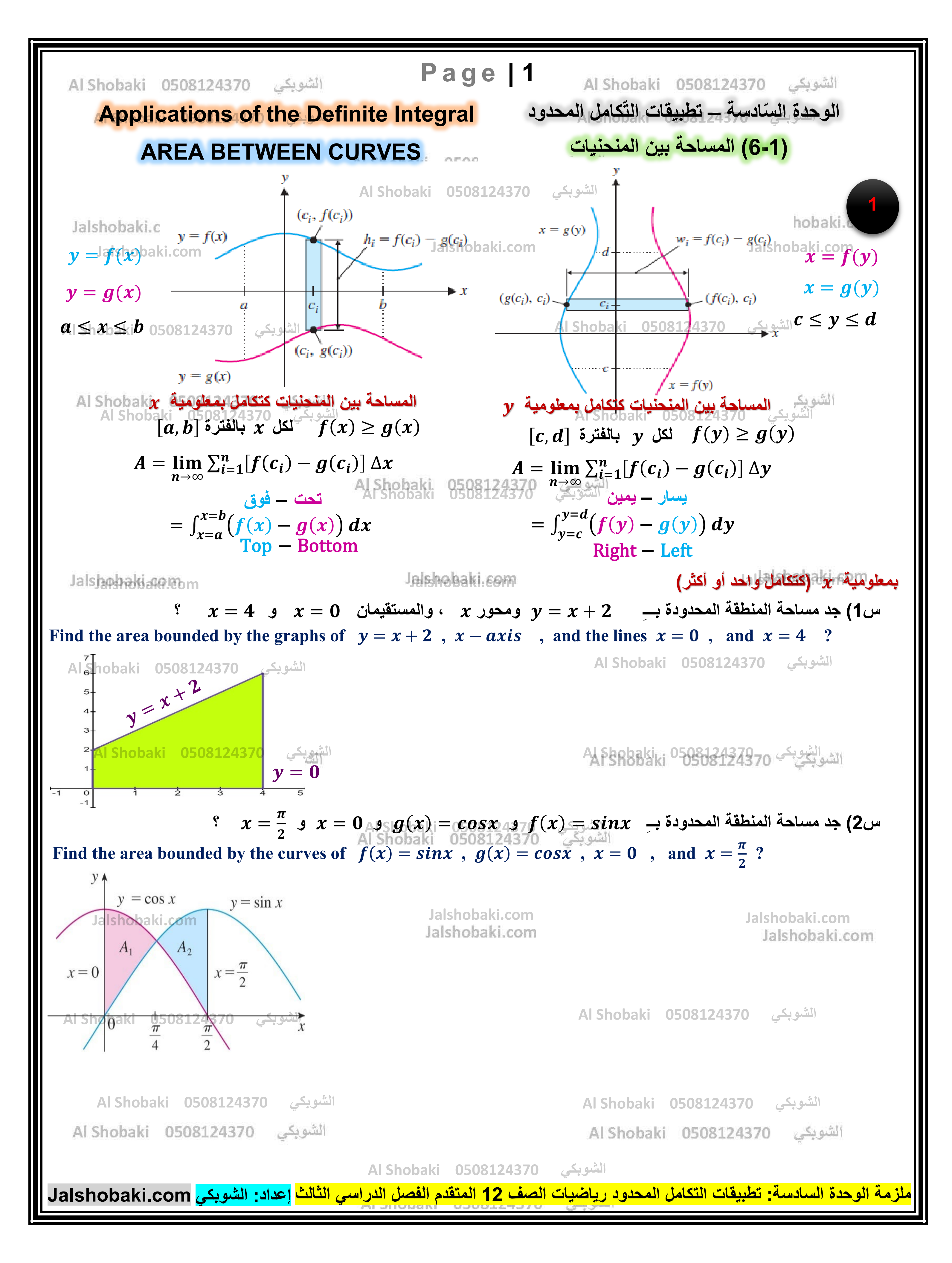
(6-1) المساحة بين المنحنيات — AREA BETWEEN CURVES

الرياضيات...... أسلوب حياة

مهمتنا: اكساب الطالب المعرفة والمهارة

ملازمنا: مختصرة – مفيدة - وشاملة

مع دعائي لكم بالتوفيق والنجاح الباهر



Applications of the Definite Integral — الوحدة السّادسة – تطبيقات التّكامل المحدود

AREA BETWEEN CURVES — (6-1) المساحة بين المنحنيات

$y = f(x)$

$y = g(x)$

$a \le x \le b$

$x = f(y)$

$x = g(y)$

$c \le y \le d$

المساحة بين المنحنيات كتكامل بمعلومية x

$f(x) \ge g(x)$ لكل x بالفترة $[a, b]$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\, \Delta x$$

فوق – تحت

$$= \int_{x=a}^{x=b} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

Top – Bottom

المساحة بين المنحنيات كتكامل بمعلومية y

$f(y) \ge g(y)$ لكل y بالفترة $[c, d]$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\, \Delta y$$

يمين – يسار

$$= \int_{y=c}^{y=d} \big(f(y) - g(y)\big)\, dy$$

Right – Left

بمعلومية x (كتكامل واحد أو أكثر)

س1) جد مساحة المنطقة المحدودة بـِ $y = x + 2$ ومحور x ، والمستقيمان $x = 0$ و $x = 4$ ؟

Find the area bounded by the graphs of $y = x + 2$, $x - axis$, and the lines $x = 0$, and $x = 4$?

س2) جد مساحة المنطقة المحدودة بـِ $f(x) = sinx$ و $g(x) = cosx$ و $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$ ؟

Find the area bounded by the curves of $f(x) = sinx$, $g(x) = cosx$, $x = 0$, and $x = \frac{\pi}{2}$?

س3) إذا علمت أنّ المساحة بين $f(x) = x^2$ و $y = ax$ كانت تساوي 4.5 وحدة مساحة مربّعة، فما قيمة a حيث a موجبة؟

If the area between $f(x) = x^2$ and $y = ax$ is 4.5 units squared, what is the value of a where a is positive?

a^2 $y = ax$ $y = x^2$ a

بمعلومية y (كتكامل واحد أو أكثر)

س1) جد مساحة المنطقة المحدودة بـ $y = \sqrt{x}$ ومحور y ، والمستقيمان $y = 1$ و $y = 3$ ؟

Find the area bounded by the graphs of $y = \sqrt{x}$, $y - axis$, and the lines $y = 1$, and $y = 3$?

$x = 0$ $y = 3$ $y = 1$ $x = y^2$ $y = \sqrt{x}$

س2) جد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $x = 1 - y^2$ و $x = y^2 - 1$ ؟

Find the area bounded by the curves $x = 1 - y^2$ and $x = y^2 - 1$?

$x = y^2 - 1$ $x = 1 - y^2$

س3) جد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $x = 3y - 2$ و $x = 2y^2 - 4$ ؟

Find the area bounded by the curves $x = 3y - 2$ and $x = 2y^2 - 4$?

$x = 2y^2 - 4$ $x = 3y - 2$

بمعلومية x و y

س1) جد مساحة المنطقة المحدودة بـ $y = x^2$ ، $y = 2 - x$ ، $y = 0$ بمعلومية x و y ؟

Find the area bounded by the curves of $y = x^2$, $y = 2 - x$, and $y = 0$ given x and y ?

س2) لأجل $y = x - x^2$ ، و $y = kx$ كما هو مبيّن بالشّكل. جد قيمة k بحيث تكون $A_1 = A_2$ ؟

For $y = x - x^2$ and $y = kx$ as shown, find k such that $A_1 = A_2$?

2

يتحدّث عن نسبة الطّاقة المفقودة أثناء الاصطدام. والمثال يتكلّم عن الاصطدام بين مضرب التّنس والكرة وأنّ الطّاقة المفقودة تتناسب مع المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ ، حيث $f_c(x)$ القوّة أثناء انكماش الكرة، و $f_e(x)$ القوّة أثناء تمدّد الكرة، حيث $0 \le x \le m$ (المسافة).

In collisions between a tennis racket and ball, Let x represent how far the ball is compressed, where $0 \le x \le m$, then, the energy transferred is proportional to the area under the curve $y = f(x)$. Suppose that $f_c(x)$ is the force during compression of the ball and $f_e(x)$ is the force during expansion of the ball. The percentage of energy lost in the collision is then given by:

تعطى نسبة الطّاقة المفقودة أثناء الاصطدام بـــِ:

$$100\left(\frac{\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx}{\int_0^m f_c(x)\,dx}\right)$$

مثال) استخدم قاعدة نقطة المنتصف لتقدير نسبة الطّاقة التي احتفظت بها كرة البيسبول؟

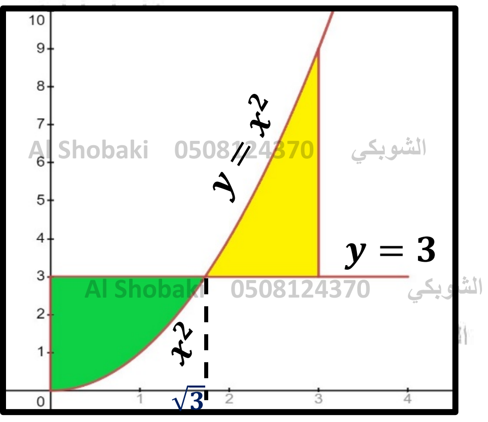
Use The Midpoint Rule to estimate the proportion of energy retained by the baseball ?

$x(cm)$	0	0.25	0.5	0.75	1
$f_c(x)(N)$	0	110	220	400	700
$f_e(x)(N)$	0	100	200	300	700

مسائل متنوّعة

س1) القيمة المتوسّطة لدالة $f(x)$ هي $A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. احسب القيمة المتوسّطة لـِ $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 3]$ وبيّن أنّ المساحة فوق $y = A$ وتحت $y = f(x)$ تساوي المساحة تحت $y = A$ وفوق $y = f(x)$ ؟

The average value of a function $f(x)$ on the interval $[a, b]$ is $A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Compute the average value of $f(x) = x^2$ on $[0, 3]$ and show that the area above $y = A$ and below $y = f(x)$ equals the area below $y = A$ and above $y = f(x)$?



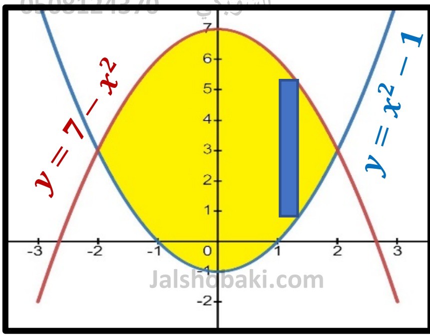
الأسئلة من (2-3) جد المساحة بين المنحنيان على الفترة المعطاة؟
Find the area between the curves on the given interval?

2) $y = \cos x \ , \ y = x^2 + 2 \ , \quad 0 \le x \le 2$

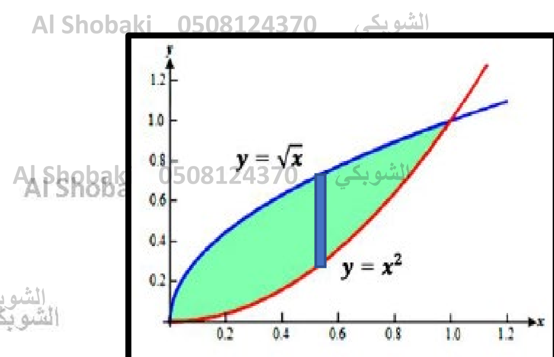
3) $y = e^x \ , \ y = x - 1 \ , \ -2 \le x \le 0$

الأسئلة من (4-8) ارسم وأوجد مساحة المنطقة التي تحدّدها تقاطعات المنحنيات؟
Sketch and find the area determined by the intersections of the curves?

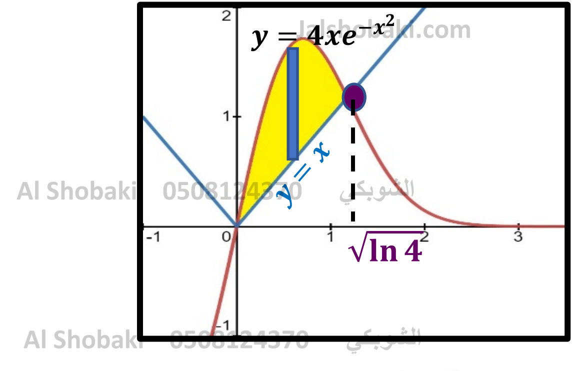
4) $y = x^2 - 1 \ , \ y = 7 - x^2$



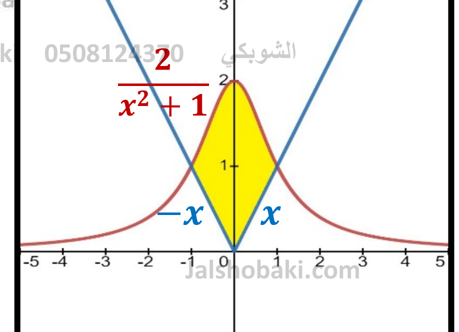

5) $y = \sqrt{x} \ , \ y = x^2$



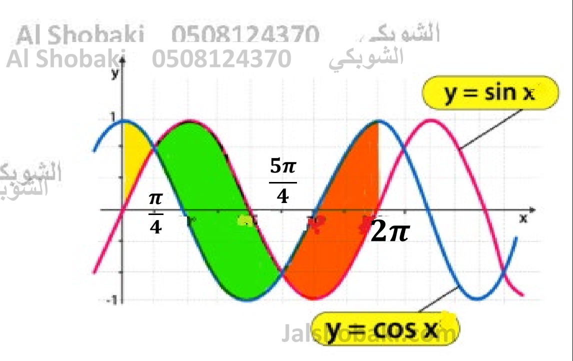
6) $y = 4xe^{-x^2} \ , \ y = |x|$



7) $y = \frac{2}{x^2+1}$, $y = |x|$



8) $y = sinx$, $y = cosx$, $0 \le x \le 2\pi$



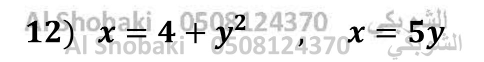
الأسئلة من (16-9) ارسم وأوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات المعطاة، اختر متغيّر التّكامل بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد، تحقّق من اجابتك باستخدام صيغة هندسية أساسية للمساحة؟

Sketch and find the area of the region bounded by the given curves. Choose the variable of integration so that the area is written as a single integral. Verify your answers with a basic geometric area formula?

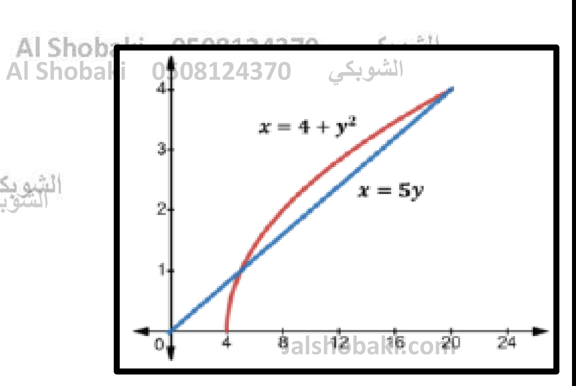
9) $y = x$, $y = 2 - x$, $y = 0$

10) $y = x$, $y = 2$, $y = 6 - x$, $y = 0$

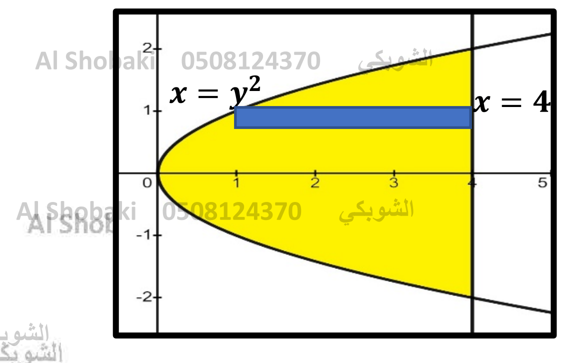
11) $x = y \quad , \quad x = -y \quad , \quad x = 1$

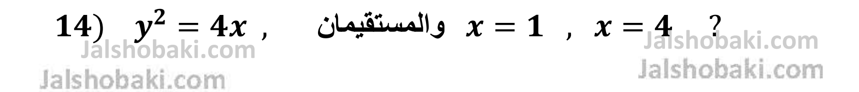


12) $x = 4 + y^2 \quad , \quad x = 5y$

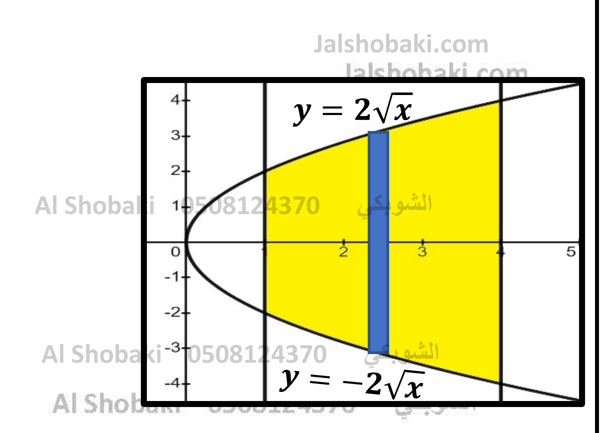


13) $x = y^2 \quad , \quad x = 4$

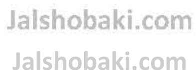


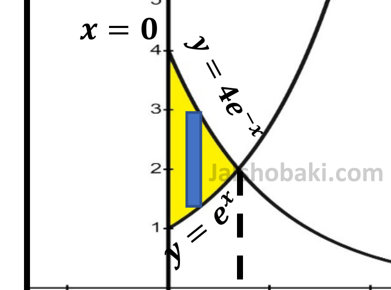


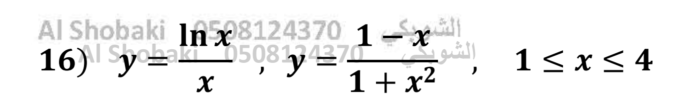
14) $y^2 = 4x$, والمستقيمان $x = 1 \quad , \quad x = 4$?



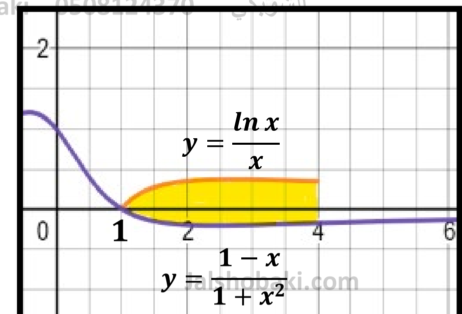
15) $y = e^x$, $y = 4e^{-x}$, $x = 0$



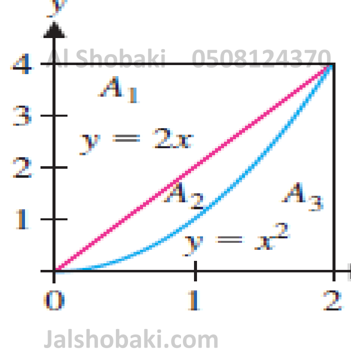




16) $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $y = \dfrac{1 - x}{1 + x^2}$, $1 \le x \le 4$



In terms of A_1 , A_2 , and A_3 identify the area given by each integral? بدلالة A_1 , A_2 , A_3 حدّد المساحة المعطاة بكل تكامل؟ (17



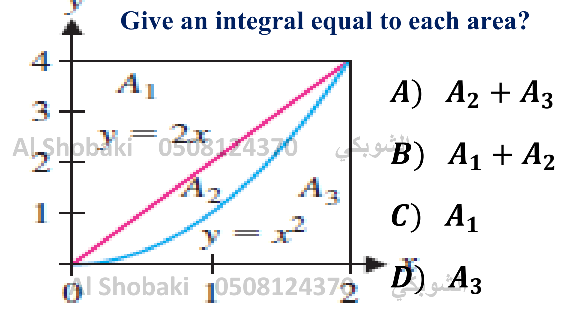
a) $\int_0^2 (2x - x^2)\, dx$

b) $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$

c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$

d) $\int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy$

Give an integral equal to each area? أعط تكاملاً مساوياً لكل مساحة؟ (18



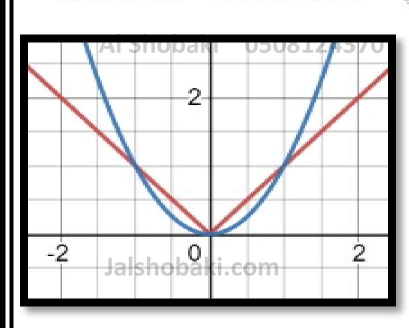
A) $A_2 + A_3$

B) $A_1 + A_2$

C) A_1

D) A_3

19) المنطقة المحدودة بـــ $y = |x|$, $y = x^2$



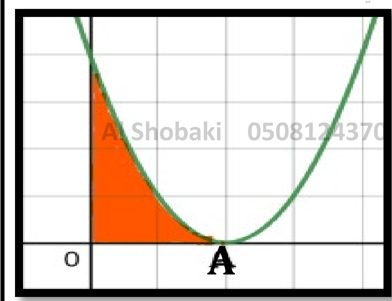
$A)\ 2\int_0^1 (x - x^2)\, dx$

$B)\ \int_0^1 (x - x^2)\, dx$

$C)\ \int_{-1}^1 (x - x^2)\, dx$

$D)\ 2\int_{-1}^0 (x - x^2)\, dx$

20) إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تحت المنحنى $y = (x - A)^2$ تساوي $\frac{8}{3}$ فإنّ قيمة A هي ؟



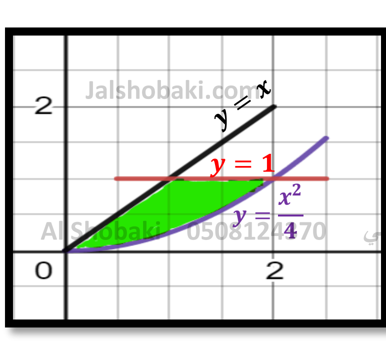
$A)\ -2$

$B)\ -1.025$

$C)\ \ 1.045$

$D)\ \ 2$

21) أي من التكاملات التالية تمثّل المساحة المظللة؟



$A)\ \int_0^2 x - \frac{x^2}{4}\ \ dx$

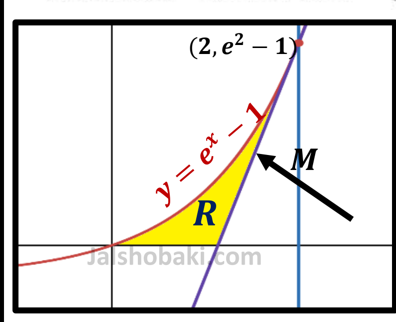
$B)\ \int_0^1 2\sqrt{y}\ dy\ - \frac{1}{2}$

$C)\ \int_0^1 4\sqrt{y} - y\ \ dy$

$D)\ \int_0^1 x - \frac{x^2}{4}\ \ dx\ \ +\ \ \int_1^2 x - \frac{x^2}{4}\ \ dx$



22) الشكل يمثل بيان الدالة $y = e^x - 1$ وخط المماس M عند النقطة $(2, e^2 - 1)$
أوجد مساحة المنطقة المظللة R المحدودة بـــ $y = e^x - 1$ ، محور x ، وخط المماس M ؟



Find the area of region R, which is bounded by the graph of $y = e^x - 1$, x-axis and the line M tangent to the graph at $(2, e^2 - 1)$?